ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Premi "Antonio Feltrinelli"

Premio Internazionale per la *Matematica*

Jean BOURGAIN

Viaggio nel mondo di un matematico: analisi di Fourier, equazioni differenziali e teoria dei numeri.

Illustre Presidente, Autorità, membri dell'Accademia, Signore e Signori,

non occorre ribadire che mi sento profondamente onorato da questo prestigioso e inaspettato riconoscimento. La storia della scienza italiana, con le sue innumerevoli eccellenze dal medioevo ai giorni nostri, unitamente alla statura scientifica dei colleghi premiati in passato, infondono in me un sincero senso di umiltà. Sono lusingato di ricevere questo premio e ringrazio il comitato che mi ha selezionato.

Negli anni, ho avuto la fortuna di incontrare e lavorare con personalità di spicco della scienza, ognuno con diversi interessi e un diverso stile, da cui ho imparato molto. Hanno tutti avuto un ruolo cruciale, mi hanno introdotto a nuovi argomenti e hanno incoraggiato la mia ricerca. Gran parte del mio lavoro è il frutto della collaborazione con ricercatori giovani e più maturi, talvolta per lunghi periodi di tempo. Sono profondamente grato a tutti loro.

Condizioni di lavoro eccezionali mi hanno consentito di dedicarmi completamente alla ricerca scientifica. All'inizio della mia carriera, la nomina alla *Belgian Science Foundation*; poi, a metà anni '80, la cattedra presso l'*Institut des Hautes Etudes Scientifiques* a Bures/Yvette, in Francia; dal 1994, la nomina allo *Institute for Advanced Study* a Princeton. L'intensità della vita scientifica e l'esposizione a idee nuove hanno rappresentato e rappresentano oggi, per me, una magnifica esperienza e vorrei ringraziare tutti per la fiducia in me riposta.

Una delle domande poste di frequente ai matematici riguarda il ruolo della matematica nella scienza e nella società. Ovviamente, nel corso degli ultimi decenni abbiamo assistito alla realizzazione di una miriade di diverse applicazioni che spesso hanno posto nuovi problemi o hanno condotto verso nuove aree di ricerca. Tuttavia penso che la reale importanza della matematica risieda in un qualcosa di profondo, che va oltre le sue applicazioni. È guidata dalla curiosità, dalla ricerca di una verità assoluta, dall'esigenza di una comprensione di base. Allo stesso modo, l'esplorazione delle leggi della natura, della fisica e della biologia rivela un interesse che va al di là della scoperta di nuove forme di energia a basso costo o di nuove cure in medicina. Di fronte a innumerevoli applicazioni, talvolta di grande rilievo, la vera essenza è il pensiero matematico, l'astrazione stessa, che fanno parte della nostra tradizione. La matematica è guidata dall'esigenza di risolvere problemi, vecchi e nuovi.

Negli ultimi anni, la pratica della matematica ha subito un'evoluzione. Se le innovazioni, storicamente, erano dovute alla ricerca condotta da singoli individui, oggi il progresso è spesso un prodotto che deriva dalla collaborazione, in tutte le fasi. Lo si deve, in parte, alle risorse di Internet che facilitano la comunicazione. Potenti motori di ricerca consentono l'accesso immediato alle informazioni e allo stato dell'arte, di particolare importanza per coloro i quali lavorano in aree periferiche. Come in tutte le scienze, la diffusione e la crescente complessità del campo di ricerca impongono una maggiore specializzazione. Per la maggior parte di noi, il nostro territorio di ricerca attivo è molto ristretto, all'interno di un'area di poco più ampia di cui possediamo una conoscenza generica. Un 'genio universale' come Leonardo da Vinci, anche nel campo della matematica, sembra fantascienza al giorno d'oggi. Tuttavia, nel nostro lavoro, anche una visione più ampia e vaga può essere la chiave del successo.

Anche l'importanza delle diverse parti della matematica si è evoluta nel tempo. Alcuni settori tradizionalmente periferici, come la teoria dei grafi o la geometria della dimensione superiore, ad esempio, hanno acquisito un rilievo maggiore grazie alle applicazioni in informatica teorica e nell'elaborazione dei dati. Senza dubbio, assisteremo in futuro ad altri fenomeni simili. Vengono alla mente nuove tendenze, quali la biologia matematica, così come l'esigenza di progredire in materia di teoria dell'automazione e dei controlli. È difficile predire quali settori della matematica affronteranno le nuove sfide.

In genere i matematici sono divisi in due categorie: da un alto i teorici, dall'altro i risolutori di problemi. Si tratta di una semplificazione, pur contenendo una verità di fondo. In realtà, la risoluzione di problemi richiede spesso nuove prospettive e nuovi metodi. Di sicuro, mi descriverei come appartenente alla seconda categoria, sulla base di una selezione di problemi dettati dalla mia esperienza e dalle mie personali preferenze.

Nelle pagine che seguono, vorrei descrivere a grandi linee il lavoro che ho portato avanti, collegato all'analisi di Fourier. L'analisi di Fourier, in modo diverso, riveste un ruolo importante in numerose discipline matematiche pure e applicate, comprese la teoria delle equazioni differenziali e la teoria dei numeri. Collaborando in parte con altri ricercatori, ho fatto diverse scoperte sulle interazioni tra frequenze, in modo da contribuire al progresso di tali teorie. Ma prima di entrare nei dettagli, dobbiamo fare un passo indietro e introdurre Fourier e l'eredità che ci ha lasciato.

J. Fourier (1768-1830) era un uomo dalle mille sfaccettature: matematico, fisico, storico, amministratore, coinvolto anche in campo militare. Alla fine del XVIII secolo partecipò alla spedizione egiziana di Napoleone, e, poco dopo fu nominato Prefetto del dipartimento di Isère, in Francia. È in quel momento che Fourier iniziò a studiare la propagazione del calore, che lo condusse a scrivere, pochi anni dopo, il suo celebre saggio "Sulla propagazione del calore nei corpi solidi" (1807). I due elementi principali del lavoro sono la derivazione della cosiddetta 'equazione del calore' e, dal lato matematico, la trasformata di Fourier.

Una delle scoperte fondamentali di Fourier ha stabilito che le funzioni arbitrarie possono essere rappresentate come una sovrapposizione di onde elementari, quali *sin x*, *cos x*, *2x sin*, *cos 2x* ecc. Questo è ciò che chiamiamo 'analisi di Fourier'. Ad esempio, un suono musicale complesso prodotto da una corda di chitarra vibrante può essere sintetizzato in questo modo, per rivelare quali siano i componenti della frequenza. L'equazione del calore descrive come la distribuzione della temperatura si evolva nel tempo. In aggiunta alla sua derivazione da principi fisici di base, Fourier comprese come risolvere in modo semplice l'equazione eseguendo prima una decomposizione Fourier della distribuzione della temperatura iniziale a un tempo $t = 0$. Ma la rilevanza scientifica dell’analisi di Fourier, in particolare per la moderna teoria delle equazioni differenziali, sia lineari che non lineari, è andata ben al di là delle previsioni.

I miei contributi in questo settore si riferiscono principalmente ad un’altra importante equazione in fisica, l'equazione di Schrödinger, dal nome del fisico austriaco E. Schrödinger (1887-1961). L’equazione descrive l'evoluzione temporale della funzione d'onda in meccanica quantistica, dove svolge il ruolo della legge di Newton. L'equazione di Schrödinger è utilizzata anche in ottica non lineare per modellare la propagazione laser, ad esempio. L’analisi di Fourier è altrettanto importante per descrivere le soluzioni dell’equazione di Schrödinger, benché si tratti di comportamenti diversi (l’equazione del calore è dissipativa, mentre l'equazione di Schrödinger è conservativa). Le soluzioni dell’equazione di Schrödinger possono essere oscillatorie nel tempo e mostrare un comportamento ricorrente (il fenomeno di Fermi-Pasta-Ulam). I metodi della fisica statistica, come la teoria delle misure invarianti di Gibbs, si sono rivelati utili nel descrivere alcune caratteristiche qualitative, secondo una linea di ricerca che ho perseguito a metà degli anni novanta. L’esecuzione di questa analisi ha condotto a problemi relativi alle interazioni di frequenza, soprattutto nella dimensione superiore. A grandi linee, le soluzioni sono costituite da pacchetti d'onda che costituiscono parti semplici; le proprietà dipendono dall'effetto collegato di tali pacchetti. È proprio la loro interazione che sono riuscito a descrivere meglio, utilizzando nuovi strumenti derivati dall’analisi di Fourier, raggiungendo così importanti risultati e tecniche collegate a questa teoria e non solo a questa.

Le interazioni di frequenza citate in precedenza sono legati a problemi di teoria dei numeri e soluzioni integrali di determinate equazioni algebriche. Ad esempio, una soluzione all’equazione di Schrödinger può essere data da una somma Gauss derivata dalla teoria dei numeri. Per avere un’idea della natura di tali problemi teorici, ricordiamo il teorema dei quattro quadrati di Lagrange, secondo cui qualsiasi numero intero può essere riscritto come somma di quattro quadrati. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) fu un famoso matematico italiano, responsabile di numerose scoperte di matematica e meccanica celeste. Per la cronaca, proprio Fourier gli successe presso l'*Ecole Polytechnique* di Parigi nel 1795.

Tornando al teorema dei quattro quadrati, si tratta del caso particolare di una domanda più generale: rappresentare gli interi come somma delle potenze k^{th}, il cosiddetto problema di Waring posto dal matematico britannico E. Waring nel 1770. Per esempio, ogni intero può equivalere alla somma di nove cubi e ogni numero sufficientemente grande è la somma di sette cubi (mentre si ritiene che quattro cubi dovrebbero essere già sufficienti). Ciò serve a dimostrare che tale area di ricerca è quanto mai attuale e attiva. Dopo il lavoro iniziale da parte di Eulero e Hilbert, Hardy e Littlewood svilupparono un nuovo approccio, basato sull'analisi di Fourier, chiamato il metodo del cerchio. Tale metodo consente non solo di dimostrare la solvibilità delle equazioni, ma dice anche quante soluzioni possiamo attenderci. La tecnologia è stata sviluppata e notevolmente raffinata da molti studiosi, in particolare dal matematico russo I. M. Vinogradov, circa 80 anni fa. Il suo lavoro è una pietra miliare che ha condotto a diverse scoperte nella teoria dei numeri, uno dei capisaldi di questo settore della ricerca matematica.

A parte il problema di Waring, Vinogradov ha ottenuto ciò che oggi rimane uno dei risultati più evidenti circa la distribuzione dei numeri primi e nei confronti dell'Ipotesi di Riemann sugli zeri della funzione zeta di Riemann. I numeri primi hanno affascinato generazioni di matematici per secoli. L'Ipotesi di Riemann, postulata dall'influente matematico tedesco B. Riemann nel 1859, famoso anche per i suoi lavori in geometria differenziale e la relatività generale, è la chiave per comprendere alcune proprietà dei numeri primi. Fino ad oggi, resta un grande mistero della matematica ed è considerato uno dei problemi aperti più importanti e impegnativi. Al di là del rilievo per la comprensione dei numeri primi, resta impressionante l'impatto dell'Ipotesi di Riemann e delle sue generalizzazioni sulla matematica moderna.

Tornando a Vinogradov, egli ha esposto la forma ottimale del suo metodo, noto come ' teorema del valore medio di Vinogradov'. Ha una doppia formulazione, sia utilizzando il linguaggio dell'analisi di Fourier oppure, in termini puramente algebrici, come il numero di soluzioni integrali di determinati sistemi di equazioni.

Nel corso dei decenni, tale congettura ha attirato l'attenzione di molti ricercatori che hanno apportato diversi contributi e sviluppi. L'anno scorso, in collaborazione con C. Demetra e L. Guth, siamo finalmente riusciti a risolvere completamente il problema. La soluzione è basata sull'analisi di Fourier e sugli stessi principi di analisi generale delle interazioni di frequenza (ora chiamate '*decoupling*'), come applicati nel nostro studio dell'equazione di Schrodinger. Ci ha sorpreso questa soluzione del problema, derivata dalla teoria delle equazioni differenziali. Ma dimostra il valore di prospettive provenienti da diverse aree di ricerca ed è forse un'altra manifestazione dell’'unità in matematica'. Ad esempio, un input fondamentale è una diseguaglianza geometrica, nota come la disuguaglianza di Brascamp-Lieb, in parte derivata dalla fisica matematica. Pur non producendo nuove implicazioni dell’Ipotesi di Riemann, le sue conseguenze immediate annoverano un progresso sui problemi di Waring e nella teoria delle somme di Weyl, una componente importante nel metodo di Hardy-Littlewood. In tal modo, si sta realizzando l'intera portata delle applicazioni nella teoria dei numeri, e oltre la teoria stessa.

L’*unità in matematica* riguarda soprattutto la percezione di somiglianze strutturali che si verificano in aree e problemi diversi. L’abilità di riconoscere tali analogie può essere la chiave per avanzare. Tuttavia, il concetto di unità rimane ancora una possibile linea guida, spesso illusoria, non ancora un modo sicuro per trarre deduzioni. Il suo successo, in genere, è evidente soltanto a posteriori. Negli ultimi decenni abbiamo assistito ad alcuni straordinari successi matematici, tra cui la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat e la soluzione della congettura di Poincaré in topologia. Tali risultati hanno rappresentato il culmine di complesse teorie sviluppate da generazioni di matematici. I progressi su altri problemi ben noti, tra cui l'Ipotesi di Riemann, sono stati più lenti o si trovano, al momento, in una fase di stallo. Purtroppo, i tentativi di scoprire nuovi percorsi di ricerca sulla base dei principi di unità non hanno avuto successo finora.

Al momento, la matematica è una scienza estremamente attiva.

Il futuro fa sperare in nuovi e costanti sviluppi, per risolvere problemi antichi e aprire nuove strade alla ricerca

Roma, 11 novembre 2016