ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXXIX.

1892

SERIE QUINTA

RENDICONTI

PUBBLICATI PER CURA DEI SEGRETARI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME I.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1892

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 gennaio 1893.

F. Brioschi Presidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuova dimostrazione del teorema sullo sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili.* Nota del prof. A. Capelli, presentata dal Socio Cremona.

« La dimostrazione di questo teorema contenuta, come caso particolare, nella Memoria da me presentata nel decorso anno (1) a questa illustre Accademia, consiste nella costruzione effettiva della formola di sviluppo mediante un uso conveniente dell'operazione (2):

$$(1)\quad \mathrm{H}_{x,y,\dots,u} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{D}_{xx} & \mathrm{D}_{xy} & \dots & \mathrm{D}_{xu} \\ \mathrm{D}_{yx} & 1+\mathrm{D}_{yy} & \dots & \mathrm{D}_{yu} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \mathrm{D}_{ux} & \mathrm{D}_{uy} & \dots & (n-1)+\mathrm{D}_{uu} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} (n-1)+\mathrm{D}_{uu} & \dots & \mathrm{D}_{yu} & \mathrm{D}_{xu} \\ . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . \\ \mathrm{D}_{uy} & \dots & 1+\mathrm{D}_{yy} & \mathrm{D}_{xy} \\ \mathrm{D}_{ux} & \dots & \mathrm{D}_{yx} & \mathrm{D}_{xx} \end{vmatrix}$$

(1) Rendiconti: febbraio 1891.

(2) Cfr. *Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar Operationen.* Mathem. Annalen Bd. XXIX.

composta colle operazioni di polare *elementari*:

$$D_{pq} \equiv q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots + q_\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu}, \qquad (p,q \equiv x, y, z, \ldots, u)$$

fra le n serie date $x, y, z, \ldots, u$. Quella dimostrazione si poteva fondare indifferentemente sulla prima o sulla seconda delle due espressioni equivalenti della stessa operazione $H_{x,y,\ldots,u}$ rappresentata nella (1).

« Nella nuova dimostrazione che siamo per dare l'operazione $H_{x,y,\ldots,u}$ viene utilizzata in un modo molto diverso da quello ivi tenuto, con un procedimento che si collega necessariamente all'uso della *seconda* delle espressioni (1), nè potrebbe egualmente fondarsi sulla *prima*.

« Non farà quindi maraviglia se le due dimostrazioni presenteranno altresì una notevole differenza nella forma del risultato, cioè della relazione fondamentale da dimostrarsi [1]:

$$F(x, y, \ldots, u) = H \,.\, \Delta f + \sum_i \Delta_i \,.\, \varphi_i$$

in cui H è la stessa operazione (1), le Δ, Δ_i sono operazioni di polare fra le $x, y, \ldots, u$, e le φ_i sono forme algebriche che contengono soltanto $n-1$ delle n serie $x, y, \ldots, u$. Invero le $n-1$ serie di variabili di ogni φ_i, secondo il risultato di quella prima dimostrazione, non sono necessariamente *le stesse* per tutte le φ_i. La nuova dimostrazione che daremo ci condurrà invece direttamente a delle forme φ_i tali che da ciascuna di esse si trovi esclusa *la stessa serie* x; poichè essa ci condurrà ad una relazione identica della forma:

$$(2) \qquad F(\overset{m}{x}, y, z, \ldots, u) = H \,.\, \Delta F + \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}} \, D_{xy}^{\alpha_1} D_{xz}^{\alpha_2} \ldots D_{xu}^{\alpha_{n-1}} \,.\, F$$

nella quale, essendo m il grado di F rispetto alla serie x, le forme

$$\varphi = D_{xy}^{\alpha_1} D_{xz}^{\alpha_2} \ldots D_{xu}^{\alpha_{n-1}} \,.\, F \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = m$$

non contengono più, evidentemente, la serie x.

[1] Per $\nu = n$ si ha:

$$H_{x,y,\ldots,u} = (xy..u) \,.\, \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n} = (xy..u) \,.\, \Omega$$

onde in tal caso la relazione fondamentale prende la forma:

$$F(x,y,\ldots,u) = (xy..u) \,.\, F_1(x,y,\ldots,u) + \sum_i \Delta_i \,.\, \varphi_i$$

che applicata più volte di seguito ci conduce immediatamente allo sviluppo di $F(xy...u)$ secondo le potenze del determinante $(xy..u)$ e le polari di forme con $n-1$ serie di variabili.

I.

« 1. Per giungere alla dimostrazione della formola (2) procederemo col metodo di induzione da $n-1$ ad n. Supporremo dunque che la esistenza di questa formola sia già stata dimostrata per forme con $n-1$ serie di variabili $y, z, .., u$, e basandoci su tale supposto mostreremo come se ne deduca una formola analoga per il caso di n serie $x, y, .., u$.

« Sviluppando il determinante, che dà la seconda espressione di $H_{x,y,..,u}$ nella (1), secondo gli elementi dell'ultima colonna si può scrivere:

(3) $$H_{x,y,z,..,u} = H'_{yz..u} \cdot D_{xx} - \Delta_1 D_{xy} - \Delta_2 D_{xz} - \cdots - \Delta_{n-1} D_{xu}$$

dove

(4) $$H'_{yz..u} = \begin{vmatrix} (n-1)+D_{uu} & \dots & D_{zu} & D_{yu} \\ . & \dots & . & . \\ . & \dots & . & . \\ D_{uz} & \dots & 2+D_{zz} & D_{yz} \\ D_{uy} & \dots & D_{zy} & 1+D_{yy} \end{vmatrix}$$

e dove le $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_{n-1}$ sono operazioni di polare che si potrebbero del pari rappresentare con determinanti minori di ordine $n-1$.

« Dalla identità (3) applicata ad una forma algebrica qualunque $f(\overset{\mu}{x}, y, z, \dots, u)$, di grado μ nella serie $x_1, x_2, .., x_\nu$, si deduce ora:

(5) $$\mu . H'_{yz..u} f(\overset{\mu}{x}, y, z, .., u) = H_{xyz..u} f + \Delta_1 D_{xy} f + \Delta_2 D_{xz} f + \cdots + \Delta_{n-1} D_{xu} f$$

« 2. Intanto, se $F(\overset{m+1}{y}, z, t, .., u)$ è una forma qualunque, composta colle $m-1$ serie $y, z, t, .., u$ e di grado $m+1$ nella serie y, esiste, per supposto, una formola analoga alla (2), del tipo:

(6) $$F(\overset{m+1}{y}, z, t, .., u) = H_{yz..u} \Delta F + \sum_{\alpha_1 + .. + \alpha_{n-2} = m+1} \Delta_{\alpha_1, .., \alpha_{n-2}} . D_{yz}^{\alpha_1} D_{yt}^{\alpha_2} .. D_{yu}^{\alpha_{n-2}} . F$$

in cui le Δ sono certe operazioni di polare ben determinate fra le $y, z, t, .., u$. Se ora noi poniamo in questa formola generale:

$$F(\overset{m+1}{y}, z, .., u) = (a_y b_z .. d_u) . f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u)$$

dove $(a_y b_z .. d_u)$ è il determinante composto colle forme lineari

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_\nu y_\nu$$
$$a_z \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_\nu z_\nu$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e dove nella $f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u)$ consideriamo per un momento le x come delle costanti, avremo in particolare

$$(7) \qquad (a_y b_z .. d_u) . f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u) = \Delta . \mathrm{H}_{yz..u} \left\{ (a_y b_z .. d_u) . f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u) \right\}$$

poichè è facile riconoscere che, per $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdot\cdot + \alpha_{n-2} = m + 1$, si ha identicamente:

$$\mathrm{D}_{yz}^{\alpha_1} \mathrm{D}_{yt}^{\alpha_2} .. \mathrm{D}_{yu}^{\alpha_{n-2}} \left\{ (a_y b_z .. d_u) . f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u) \right\} = 0.$$

Ciò posto, se

$$(8) \qquad \Delta = \psi\,(\mathrm{D}_{yy}, \mathrm{D}_{zz}, .., \mathrm{D}_{uu}\,;\ \mathrm{D}_{yz}, \mathrm{D}_{yu}, ...)$$

è l'espressione di Δ come aggregato razionale intero, a coefficienti costanti, delle operazioni elementari da cui dipende, e poniamo:

$$(9) \qquad \Delta' = \psi\,(1 + \mathrm{D}_{yy}, 1 + \mathrm{D}_{zz}, .., 1 + \mathrm{D}_{uu}\,;\ \mathrm{D}_{yz}, \mathrm{D}_{yu}, ...)$$

si riconosce senza difficoltà che:

$$\Delta . \mathrm{H}_{yz..u} \left\{ (a_y b_z .. d_u) . f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u) \right\} = (a_y b_z .. d_u) . \Delta' . \mathrm{H}'_{yz..u} f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u)$$

onde, sostituendo ciò nella (7) e dividendo quindi entrambi i membri di quell'identità per $(a_y b_z .. d_u)$, si conclude:

$$(10) \qquad f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u) = \Delta' . \mathrm{H}'_{yz..u} f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, z, .., u).$$

« 3. Se ora applichiamo all'identità (5) l'operazione Δ' definita dalla (9) e teniamo conto dell'identità (10), otteniamo la formola

$$(11) \qquad \mu . f(\overset{\mu}{x}, y, z, .., u) = \mathrm{H}_{xy..u} \Delta' f + \Delta' \Delta_1 \mathrm{D}_{xy} f + \Delta' \Delta_2 \mathrm{D}_{xz} f + \cdot\cdot + \Delta' \Delta_{n-1} \mathrm{D}_{xu} f$$

che scriveremo più compendiosamente così:

$$(11)' \qquad f(x, y, z, .., u) = \mathrm{H}_{xy..u} \Delta'_0 f + \Delta_1' \mathrm{D}_{xy} f + \Delta_2' \mathrm{D}_{xz} f + \cdot\cdot + \Delta'_{n-1} \mathrm{D}_{xu} f.$$

« Ma se applichiamo a ciascuna delle forme $\mathrm{D}_{xy} f$, $\mathrm{D}_{xz} f$, ... (che sono tutte di grado $\mu - 1$ nella serie x) lo stesso procedimento tenuto per la f, otterremo delle espressioni analoghe

$$\mathrm{D}_{xy} f = \mathrm{H}_{xy..u} \mathrm{Q}_0 . \mathrm{D}_{xy} f + \mathrm{Q}_1 \mathrm{D}_{xy} . \mathrm{D}_{xy} f + \mathrm{Q}_2 \mathrm{D}_{xz} . \mathrm{D}_{xy} f + \cdot\cdot + \mathrm{Q}_{n-1} \mathrm{D}_{xu} . \mathrm{D}_{xy} f$$

$$\mathrm{D}_{xz} f = \mathrm{H}_{xy..u} \mathrm{Q}'_0 . \mathrm{D}_{xz} f + \mathrm{Q}'_1 \mathrm{D}_{xy} . \mathrm{D}_{xz} f + \mathrm{Q}'_2 \mathrm{D}_{xz} . \mathrm{D}_{xz} f + \cdot\cdot + \mathrm{Q}'_{n-1} \mathrm{D}_{xu} . \mathrm{D}_{xz} f$$

. . . .

essendo sempre le Q certe operazioni di polare fra le $x, y, .., u$; le quali espressioni sostituite nella (11)′ ci daranno un risultato della forma:

$$f(x, y, z, .., u) = \mathrm{H}_{xy..u} \Delta''_0 f + \Delta''_{1,1} \mathrm{D}^2_{xy} f + \Delta''_{2,2} \mathrm{D}^2_{xz} f + \cdots + \Delta''_{n-1,n-1} \mathrm{D}^2_{xu} f$$

$$+ \Delta''_{1,2} \mathrm{D}_{xy} \mathrm{D}_{xz} f + \Delta''_{13} \mathrm{D}_{xy} \mathrm{D}_{xt} f + \cdots .$$

Procedendo allo stesso modo, cioè applicando a ciascuna delle forme $D^2_{xy}f$, $D_{xy}D_{xz}f, \ldots$ (che sono tutte di grado $\mu - 2$ nella serie x) la relazione del tipo (11)′ otterremo similmente

$$f(x,y,z,..,u) = H_{xy..u}\,\Delta_0'''\,f + \Delta_{111}'''\,D^3_{xy}f + \Delta_{112}'''\,D^2_{xy}\,D_{xz}f + \Delta_{123}'''\,D_{xy}D_{xz}D_{xt}f + \cdots$$

e così di seguito finchè si giungerà ad un risultato della forma:

$$f(\overset{\mu}{x}, y, z, .., u) = H_{xy..u}\,\Delta_0^{(\mu)}\,f + \sum_{\alpha_1+..+\alpha_{n-1}=\mu} \Delta^{(\mu)}_{\alpha_1,..,\alpha_{n-1}}\,D^{\alpha_1}_{xy}\,D^{\alpha_2}_{xz}\ldots D^{\alpha_{n-1}}_{xu}\,.\,f$$

che è appunto la relazione (2) per le n serie $x, y, z, .., u$.

« La formola (2) resta così dimostrata ed è importante notare che *le operazioni di polare che figurano nella* (2) *non dipendono affatto dai coefficienti di* $f(x, y, .., u)$ *ma solo dai gradi di* f *rispetto alle serie* $x, y, .., u$. Infatti, se si ammette ciò per lo sviluppo (6) con $n-1$ serie $y, z, .., u$, il procedimento da noi tenuto ci mostra chiaramente che il medesimo ha luogo anche per gli sviluppi relativi alle n serie $x, y, .., u$.

II.

« 1. A maggiore schiarimento applicheremo la teoria ora esposta al caso di tre serie di variabili:

$$x \equiv x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$$
$$y \equiv y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\nu$$
$$z \equiv z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\nu.$$

Per questo caso si ha:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2 + D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{zy} & 1 + D_{yy} & D_{xy} \\ D_{zx} & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix} = D_{xx}\,H'_{yz} - \Delta_1 D_{xy} - \Delta_2\,D_{xz}$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 + D_{zz} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{yx} \end{vmatrix} = (2 + D_{zz})D_{yx} - D_{zx}\,D_{yz} = (1 + D_{zz})D_{yx} - D_{yz}\,D_{zx}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} D_{zy} & 1 + D_{yy} \\ D_{zx} & D_{yx} \end{vmatrix} = D_{zx}(1 + D_{yy}) - D_{zy}\,D_{yx}$$

$$H'_{yz} = \begin{vmatrix} 2 + D_{zz} & D_{yz} \\ D_{zy} & 1 + D_{yy} \end{vmatrix} = (2 + D_{zz})(1 + D_{yy}) - D_{zy}\,D_{yz}$$

cosicchè la formola (11) del § precedente diviene:

$$\text{(a)} \qquad \mu.f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = H_{xyz}\,\Delta'\,f + \Delta'\,\Delta_1\,.\,D_{xy}f + \Delta'\,\Delta_2\,.\,D_{xz}f$$

dove ora Δ' è un' operazione di polare fra le y, z che deve dare identicamente

$$\text{(b)} \qquad \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \Delta'.\,H'_{yz}\,\varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}).$$

« 2. Per calcolare l'espressione effettiva di $\varDelta'$ si ricorrerà, secondo la teoria esposta, alla formola fondamentale (2) relativa a due serie di variabili. Questa formola come segue facilmente dall'identità

$$f(\overset{\mu}{y}, \overset{\lambda}{z}) = \frac{D_{zy}\, D_{yz} f}{\mu(\lambda+1)} + \frac{H_{yz} f}{\mu(\lambda+1)}$$

applicata più volte di seguito (cioè prima ad f, poi successivamente a $D_{yz} f$, $D^2_{yz} f$; ecc.) è la seguente:

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} f(\overset{\mu}{y}, \overset{\lambda}{z}) = & \left\{ \frac{1}{\mu(\lambda+1)} + \frac{D_{zy}\, D_{yz}}{\mu(\mu-1)(\lambda+1)(\lambda+2)} + \right. \\ & + \frac{D^2_{zy}\, D^2_{yz}}{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} + \cdots \\ & \left. \cdots + \frac{D^{\mu-1}_{zy}\, D^{\mu-1}_{yz}}{\underline{|\mu}\,.\,(\lambda+1)(\lambda+2)..(\lambda+\mu)} \right\} . H_{yz} f + \frac{D^{\mu}_{zy}\, D^{\mu}_{yz} f}{\underline{|\mu}\,.\,(\lambda+1)(\lambda+2)..(\lambda+\mu)} . \end{aligned}$$

Ponendo ora in questa formola

$$f(\overset{\mu}{y}, \overset{\lambda}{z}) = (a_y\, b_z)\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}),$$

se ne deduce, dividendo ambo i membri per $(a_y\, b_z)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = & \left\{ \frac{1}{(m+1)(m'+2)} + \frac{D_{zy}\, D_{yz}}{(m+1)m\,.\,(m'+2)(m'+3)} + \right. \\ & + \frac{D^2_{zy}\, D^2_{yz}}{(m+1)m(m-1)\,.\,(m'+2)(m'+3)(m'+4)} + \cdots \\ & \left. \cdots + \frac{D^m_{zy}\, D^m_{yz}}{\underline{|m+1}\,.\,(m'+2)(m'+3)..(m'+m+2)} \right\} \cdot H'_{yz}\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) \end{aligned}$$

il che si può anche scrivere così:

$$\text{(d)} \qquad \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \left\{ \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\underline{|m'+1}\; \underline{|m-i}}{\underline{|m+1}\; \underline{|m'+2+i}}\, D^i_{zy}\, D^i_{yz} \right\} \cdot H'_{yz}\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}).$$

L'operazione $\varDelta'$ che soddisfa alla (b), e deve sostituirsi in (a), è data dunque da:

$$\text{(e)} \qquad \varDelta' = \frac{\underline{|m'+1}}{\underline{|m+1}} \cdot \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\underline{|m-i}}{\underline{|m'+2+i}}\, D^i_{zy}\, D^i_{yz} \quad (^1).$$

(1) Se in luogo delle operazioni D_{yz}, D_{zy} si vogliano addottare le operazioni corrispondenti D_1, D_2, già usate da Clebsch e Gordan, legate alle nostre dalle relazioni identiche:

$$D_{yz} = D_1 \,.\, D_{yy}\ ,\ D_{zy} = D_2 \,.\, D_{zz}$$

dalle quali si deduce

$$\begin{aligned} D^i_{zy}\, D^i_{yz}\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) & = m(m-1)..(m-i+1)\,.\,(m'+1)(m'+2)..(m'+i)\, D^i_2\, D^i_1 \,.\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \\ & = \frac{\underline{|m}\quad \underline{|m'+i}}{\underline{|m-i}\; \underline{|m'}}\, D^i_2\, D^i_1\, \varphi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) \end{aligned}$$

« 3. Le operazioni di polare nel secondo membro della (a) sono così tutte determinate completamente. Innanzi di procedere scriveremo la (a) più brevemente così:

$$(a')\qquad \mu f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \mathrm{H}_{xyz}\,.\,\mathrm{T}_{m,m'}\,f + \mathrm{T}'_{m,m'}\,.\,\mathrm{D}_{xy}\,f + \mathrm{T}''_{m,m'}\,.\,\mathrm{D}_{xz}\,f$$

con che si mette meglio in evidenza che le operazioni di polare $\mathrm{T}_{m,m'}$, $\mathrm{T}'_{m,m'}$, $\mathrm{T}''_{m,m'}$ dipendono soltanto dai gradi m ed m', cioè sono indipendenti da μ e dai coefficienti di f.

« Ponendo ora in questa formola in luogo di f la $\mathrm{D}_{xy}\,f$ ovvero la $\mathrm{D}_{xz}\,f$, se ne deduce:

$$(\mu-1)\,.\,\mathrm{D}_{xy}\,f = \mathrm{H}_{xyz}\,.\,\mathrm{T}_{m+1,m'}\,\mathrm{D}_{xy}\,f + \mathrm{T}'_{m+1,m'}\,\mathrm{D}^2_{xy}\,f + \mathrm{T}''_{m+1,m'}\,\mathrm{D}_{xz}\,\mathrm{D}_{xy}\,f$$
$$(\mu-1)\,.\,\mathrm{D}_{xz}\,f = \mathrm{H}_{xyz}\,.\,\mathrm{T}_{m,m'+1}\,\mathrm{D}_{xz}\,f + \mathrm{T}'_{m,m'+1}\,\mathrm{D}_{xy}\,\mathrm{D}_{xz}\,f + \mathrm{T}''_{m,m'+1}\,\mathrm{D}^2_{xz}f.$$

Sostituendo queste espressioni in $(a)'$, questa ci dà:

$$\mu(\mu-1)\,.\,f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) =$$
$$= \mathrm{H}_{xyz}\,.\,\{(\mu-1)\,\mathrm{T}_{m,m'} + \mathrm{T}'_{m,m'}\,\mathrm{T}_{m+1,m'}\,\mathrm{D}_{xy} + \mathrm{T}''_{m,m'}\,\mathrm{T}_{m,m'+1}\,\mathrm{D}_{xz}\}\,f +$$
$$+ \mathrm{T}'_{m,m'}\,\mathrm{T}'_{m+1,m'}\,\mathrm{D}^2_{xy}\,f + (\mathrm{T}'_{m,m'}\,\mathrm{T}''_{m+1,m'} + \mathrm{T}''_{m,m'}\,\mathrm{T}'_{m,m'+1})\,\mathrm{D}_{xy}\,\mathrm{D}_{xz}\,f +$$
$$+ \mathrm{T}''_{m,m'}\,\mathrm{T}''_{m,m'+1}\,\mathrm{D}^2_{xz}\,f\,.$$

Si sostituiranno ora in questa formola in luogo di $\mathrm{D}^2_{xy}\,f$, $\mathrm{D}_{xy}\,\mathrm{D}_{xz}\,f$, $\mathrm{D}^2_{xz}\,f$ le loro espressioni secondo la $(a)'$, cioè:

$$(\mu-2)\,.\,\mathrm{D}^2_{xy}\,f = \mathrm{H}_{xyz}\,.\,\mathrm{T}_{m+2,m'}\,\mathrm{D}^2_{xy}\,f + \mathrm{T}'_{m+2,m'}\,\mathrm{D}^3_{xy}\,f + \mathrm{T}''_{m+2,m'}\,\mathrm{D}^2_{xy}\,\mathrm{D}_{xz}\,f$$

ecc. Così procedendo si giungerà alla formola finale:

$$\underline{|\mu}\,.\,f(\overset{\mu}{x}, \overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \mathrm{H}_{xyz}\,\Delta f + \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\mu} \Delta_{\alpha_1,\alpha_2}\,\mathrm{D}^{\alpha_1}_{xy}\,\mathrm{D}^{\alpha_2}_{xz}\,.\,f$$

ottenendo per le Δ delle espressioni composte con legge semplice per mezzo delle $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{T}''$ affette da diversi indici ».

---

la formola (c) verrà surrogata da

$$(c)'\qquad f(\overset{\mu}{y}, \overset{\lambda}{z}) = \left\{\frac{1}{\mu(\lambda+1)} + \frac{\mathrm{D}_2\,\mathrm{D}_1}{(\mu-1)(\lambda+2)} + \frac{\mathrm{D}_2{}^2\,\mathrm{D}_1{}^2}{(\mu-2)(\lambda+3)} + \ldots + \frac{\mathrm{D}_2{}^{\mu-1}\,\mathrm{D}_1{}^{\mu-1}}{1\,.\,(\lambda+\mu)}\right\}\mathrm{H}_{yz}\,f +$$
$$+ \mathrm{D}_2{}^{\mu}\,\mathrm{D}_1{}^{\mu}\,.\,f(\overset{\mu}{y}, \overset{\lambda}{z})$$

e l'operazione (e) eseguita su una forma $\psi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z})$ darà un risultato che si può anche scrivere più semplicemente così:

$$e)'\qquad \Delta'\,.\,\psi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}) = \frac{m'+1}{m+1}\sum_{i=0}^{i=m}\frac{1}{(m+i+1)(m'+i+2)}\,\mathrm{D}^{i}_2\,\mathrm{D}^{i}_1\,.\,\psi(\overset{m}{y}, \overset{m'}{z}).$$