# Modelli di crescita: certezze, fondamenti, crisi

Gabriele Lolli

"La filosofia nella matematica del '900", Accademia dei Lincei, Roma, 4-5 marzo 2024.

# Verità

Verità

Platone (427-347): matematica studio dell'essere
in quanto distinto da ciò che nasce e muore

Verità

Platone (427-347): matematica studio dell'essere
in quanto distinto da ciò che nasce e muore

un campo di studio che coinvolge il pensiero e ha un'ambizione di fornire un discorso vero di carattere universale e necessario

Verità

Platone (427-347): matematica studio dell'essere
in quanto distinto da ciò che nasce e muore

un campo di studio che coinvolge il pensiero e ha un'ambizione di fornire un discorso vero di carattere universale e necessario

Logica

Verità

Platone (427-347): matematica studio dell'essere
in quanto distinto da ciò che nasce e muore

un campo di studio che coinvolge il pensiero e ha un'ambizione di fornire un discorso vero di carattere universale e necessario

Logica

logos (λογος):

*parola* (connessi e derivati: discorso, racconto, letteratura, . . . )

*ragione* (argomento, opinione, legge ad analogia, proporzione, rapporto
calcolo, conto, valutazione)

razionalismo '600: Descartes, Spinoza, Leibniz, ...
idea che la realtà è governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana

razionalismo ’600: Descartes, Spinoza, Leibniz, ...
idea che la realtà è governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana

Christian Wolff (1679-1754): logica naturale e logica artificiale

fino a metà Ottocento

razionalismo '600: Descartes, Spinoza, Leibniz, ...
idea che la realtà è governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana

Christian Wolff (1679-1754): logica naturale e logica artificiale

fino a metà Ottocento

Algebristi inglesi (John Herschel (1792-1871), Charles Babbage (1791-1871) e George Peacock (1791-1858) ...)

calcolo delle operazioni

razionalismo ’600: Descartes, Spinoza, Leibniz, ...
idea che la realtà è governata da una serie di leggi e principi che sono perfettamente comprensibili con la ragione umana

Christian Wolff (1679-1754): logica naturale e logica artificiale

fino a metà Ottocento

Algebristi inglesi (John Herschel (1792-1871), Charles Babbage (1791-1871) e George Peacock (1791-1858) ...)

calcolo delle operazioni

“il significato delle operazioni eseguite, così come dei risultati ottenuti [...] deve essere derivata non dalle loro definizioni o dai significati assunti” (Peacock) ma dalle regole postulate

ripresa del metodo assiomatico, omettendo le definizioni

# Gottlob Frege (1848-1925) e Giuseppe Peano (1858-1932)

Gottlob Frege (1848-1925) e Giuseppe Peano (1858-1932)

Frege: *Begriffsschrift* 1879

concisione e comprensibilità / regole ben precise e definitive

Peano: *pasigrafia* “logica matematica” 1888

precisione, compressione (nel *Formulario*)

Gottlob Frege (1848-1925) e Giuseppe Peano (1858-1932)

Frege: *Begriffsschrift* 1879

concisione e comprensibilità / regole ben precise e definitive

Peano: *pasigrafia* “logica matematica” 1888

precisione, compressione (nel *Formulario*)

Bertrand Russell (1872-1970) lettera 16 giugno 1902
Frege 22 giugno:

“La Sua scoperta della contraddizione mi ha sorpreso al massimo e, quasi vorrei dire, mi ha costernato, perché con essa vacilla la base sulla quale pensavo si fondasse l’aritmetica. [. . . ] Per quanto indesiderata possa apparire di primo acchito la Sua scoperta, essa è in ogni caso degna di nota e ne deriverà forse un grande passo avanti nella logica”

Principio di comprensione

Principio di comprensione
per ogni formula $A$

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow A(y))$$

se $A(y)$ è $$y \notin y$$

non può esserci molteplicità $x$ tale che

$$\forall y (y \in x \leftrightarrow y \notin y)$$

altrimenti $$x \in x \leftrightarrow x \notin x$$

Hilbert a Frege 7 novembre 1903

[questa e altre contraddizioni]

> mi hanno portato al convincimento che la logica tradizionale è insufficiente [. . . ] e considero come lacuna essenziale nel tradizionale edificio della logica l'assunzione – condivisa finora da tutti i logici e matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se questo cada sotto di esso oppure no.

Hilbert a Frege 7 novembre 1903

[questa e altre contraddizioni]

> mi hanno portato al convincimento che la logica tradizionale è insufficiente [. . . ] e considero come lacuna essenziale nel tradizionale edificio della logica l'assunzione – condivisa finora da tutti i logici e matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se questo cada sotto di esso oppure no.

logica del primo ordine e logiche di ordine superiore

G. Boolos, “Saving Frege from Contradiction”,
*Proceed. Aristotelian Society*, **8** (1986-87), pp. 137-51

in

G. Boolos, *Logic, Logic, and Logic*,
Harvard Univ. Press, Cambridge Mass., 1998.

e tutta la seconda parte: Frege Studies, pp. 133-341

Resnik, Rusinof et. al.

per Hilbert la fondazione è il metodo assiomatico

per Hilbert la fondazione è il metodo assiomatico

non come garanzia di certezze:
studiare rapporti tra i suoi risultati più importanti, mutua derivabilità o implicazione unidirezionale, o numero di conseguenze significative, ai fini di presentare una organizzazione sempre più connessa, rivelatrice del significato di diversi risultati, aperta all'incontro con altre teorie o discipline

per Hilbert la fondazione è il metodo assiomatico

non come garanzia di certezze:
studiare rapporti tra i suoi risultati più importanti, mutua derivabilità o implicazione unidirezionale, o numero di conseguenze significative, ai fini di presentare una organizzazione sempre più connessa, rivelatrice del significato di diversi risultati, aperta all'incontro con altre teorie o discipline

"[l]'occuparsi dei fondamenti di una scienza ha un fascino particolare e il controllo di questi fondamenti farà sempre parte dei compiti più raffinati dei ricercatori. Una volta Weierstrass ha detto: 'La meta che dobbiamo avere sempre davanti agli occhi consiste nel cercare di ottenere un più sicuro giudizio sui fondamenti della scienza'."

Se otteniamo questa dimostrazione [della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi] allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive: una conoscenza, questa, della massima importanza per noi, anche per il suo carattere filosofico generale.
[Hilbert, 1922]

> Se otteniamo questa dimostrazione [della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi] allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive: una conoscenza, questa, della massima importanza per noi, anche per il suo carattere filosofico generale.
> [Hilbert, 1922]

"Per penetrare davvero dentro la scienza, è certamente indispensabile occuparsi di singoli problemi" (Weiertstrass)

# Risolubilità dei problemi

## Risolubilità dei problemi

regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili

## Risolubilità dei problemi

regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili

Leopold Kronecker (1823-1891) (principio di): definizione genuina sse comporta per la sua applicazione un numero finito di tentativi

## Risolubilità dei problemi

regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili

Leopold Kronecker (1823-1891) (principio di): definizione genuina sse comporta per la sua applicazione un numero finito di tentativi

Emile Borel (1871-1956) quando è dato un insieme:

quando l'appartenenza determinata dalla logica

o quando esiste metodo per generare elementi regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili

Leopold Kronecker (1823-1891) (principio di): definizione genuina sse comporta per la sua applicazione un numero finito di tentativi

Emile Borel (1871-1956) quando è dato un insieme:

quando l'appartenenza determinata dalla logica

o quando esiste metodo per generare elementi

se due funzioni continue non sono identiche, esiste un numero razionale tale che per esso le due funzioni sono diverse, e i loro valori per un tale numero incominciano a differire dopo il calcolo di un numero $m$ di cifre decimali dell'argomento

## Risolubilità dei problemi

regolamentare i metodi disponibili per pervenire a una formula, o a un'affermazione sì/no, che siano dimostrabili e non lascino alcun dubbio, visto che le teorie sono garantite solo dal procedimento deduttivo o con altri metodi a quello riconducibili

Leopold Kronecker (1823-1891) (principio di): definizione genuina sse comporta per la sua applicazione un numero finito di tentativi

Emile Borel (1871-1956) quando è dato un insieme:

quando l'appartenenza determinata dalla logica

o quando esiste metodo per generare elementi

se due funzioni continue non sono identiche, esiste un numero razionale tale che per esso le due funzioni sono diverse, e i loro valori per un tale numero incominciano a differire dopo il calcolo di un numero $m$ di cifre decimali dell'argomento

problema semidecidibile

Hilbert 1900 Problemi matematici

Hilbert 1900 Problemi matematici

– problemi risolti in un senso diverso da quello originario
– se capita di usare ipotesi insufficienti o sbagliate
dimostrare impossibilità della dimostrazione a queste condizioni

Hilbert 1900 Problemi matematici

– problemi risolti in un senso diverso da quello originario
– se capita di usare ipotesi insufficienti o sbagliate
dimostrare impossibilità della dimostrazione a queste condizioni

da cui

la “convinzione che ogni problema matematico determinato debba essere necessariamente passibile di una rigorosa sistemazione”
o riuscendo a dare la risposta
oppure mostrando l'impossibilità

Hilbert 1900 Problemi matematici

– problemi risolti in un senso diverso da quello originario
– se capita di usare ipotesi insufficienti o sbagliate
dimostrare impossibilità della dimostrazione a queste condizioni

da cui

la "convinzione che ogni problema matematico determinato debba essere necessariamente passibile di una rigorosa sistemazione"
o riuscendo a dare la risposta
oppure mostrando l'impossibilità

"Questo assioma della risolubilità di ogni problema è una peculiarità propria del pensiero matematico, o non è forse una legge generale che inerisce all'intima natura del nostro intelletto, quella per cui il nostro intelletto è capace di dare una risposta a tutte le questioni da lui poste?"

nel primo problema, l'ipotesi del continuo di Cantor, auspica dimostrazione diretta del buon ordinamento, "*ad esempio, attraverso l'esibizione effettiva di tale ordinamento*"

nel primo problema, l'ipotesi del continuo di Cantor, auspica dimostrazione diretta del buon ordinamento, "*ad esempio, attraverso l'esibizione effettiva di tale ordinamento*"

nel decimo problema "sia data una equazione diofantea con certe incognite e a coefficienti razionali interi. *Si deve dare un procedimento, con il quale si possa decidere, mediante un numero finito di operazioni, se l'equazione è risolubile in numeri razionali interi*".

nel primo problema, l'ipotesi del continuo di Cantor, auspica dimostrazione diretta del buon ordinamento, "*ad esempio, attraverso l'esibizione effettiva di tale ordinamento*"

nel decimo problema "sia data una equazione diofantea con certe incognite e a coefficienti razionali interi. *Si deve dare un procedimento, con il quale si possa decidere, mediante un numero finito di operazioni, se l'equazione è risolubile in numeri razionali interi*".

procedimento, decidere, effettivo

Ricerca delle procedure effettive

Ricerca delle procedure effettive

Étienne B. de Condillac (1714 -1780):

"data una equazione, come $x + a - b = c$, noi la trasformiamo senza bisogno di sapere cosa significano le lettere da cui è formata. Se lo sappiamo, non ci penseremo; e solo dopo che l'operazione è fatta noi sostituiremo alle lettere il loro valore. Ecco perché dico che tutte le operazioni sono puramente meccaniche."

Heinrich Behmann (1891-1970):
“Di fondamentale importanza per la soluzione di questo problema [della decisione (*Entscheidungsproblem*)] è la condizione che si ammettano come strumenti della dimostrazione solo *calcoli meccanici* che seguano date istruzioni, senza alcuna attività di pensiero in senso proprio. Si potrebbe, volendo, parlare di un pensiero *meccanico* o *di tipo meccanico* (forse si potrebbe in seguito far sì che la procedura fosse eseguita da una macchina).”

Heinrich Behmann (1891-1970):
"Di fondamentale importanza per la soluzione di questo problema [della decisione (*Entscheidungsproblem*)] è la condizione che si ammettano come strumenti della dimostrazione solo *calcoli meccanici* che seguano date istruzioni, senza alcuna attività di pensiero in senso proprio. Si potrebbe, volendo, parlare di un pensiero *meccanico* o *di tipo meccanico* (forse si potrebbe in seguito far sì che la procedura fosse eseguita da una macchina)."

i matematici diffidano della parola e dell'idea di macchina,
di sapore ingegneristico

fin dal tempo di Platone

Heinrich Behmann (1891-1970):
“Di fondamentale importanza per la soluzione di questo problema [della decisione (*Entscheidungsproblem*)] è la condizione che si ammettano come strumenti della dimostrazione solo *calcoli meccanici* che seguano date istruzioni, senza alcuna attività di pensiero in senso proprio. Si potrebbe, volendo, parlare di un pensiero *meccanico* o *di tipo meccanico* (forse si potrebbe in seguito far sì che la procedura fosse eseguita da una macchina).”

i matematici diffidano della parola e dell’idea di macchina,
di sapore ingegneristico

fin dal tempo di Platone

vicenda procedure segue altra strada

nel 1917 Hilbert riprende riflessione sul metodo assiomatico

nel 1917 Hilbert riprende riflessione sul metodo assiomatico

la questione della non-contraddittorietà è solo una di “un grande ambito gnoseologico di questioni di tonalità specificamente matematiche”:

nel 1917 Hilbert riprende riflessione sul metodo assiomatico

la questione della non-contraddittorietà è solo una di "un grande ambito gnoseologico di questioni di tonalità specificamente matematiche":

"la questione della *risolubilità* in linea di principio *di ogni problema matematico*,
la questione della *controllabilità* a posteriori del risultato di una ricerca matematica, [...]
un *criterio di semplicità* per le dimostrazioni matematiche,
la questione del rapporto tra *contenutisticità e formalismo* in matematica e in logica,
e infine la questione della *decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni"

nel 1917 Hilbert riprende riflessione sul metodo assiomatico

la questione della non-contraddittorietà è solo una di "un grande ambito gnoseologico di questioni di tonalità specificamente matematiche":

"la questione della *risolubilità* in linea di principio *di ogni problema matematico*,
la questione della *controllabilità* a posteriori del risultato di una ricerca matematica, [. . . ]
un *criterio di semplicità* per le dimostrazioni matematiche,
la questione del rapporto tra *contenutisticità e formalismo* in matematica e in logica,
e infine la questione della *decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni"

Hilbert si orienta su un unico metodo

1922 distinzione tra matematica e metamatematica

1922 distinzione tra matematica e metamatematica

la “*decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni” è chiamata *Entscheidungsproblem* per antonomasia:

1922 distinzione tra matematica e metamatematica

la "*decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni" è chiamata *Entscheidungsproblem* per antonomasia:

"determinare se una data formula qualsiasi del calcolo dei predicati è universalmente valida o no"

1922 distinzione tra matematica e metamatematica

la "*decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni" è chiamata *Entscheidungsproblem* per antonomasia:

"determinare se una data formula qualsiasi del calcolo dei predicati è universalmente valida o no"

risolto solo se "è conosciuto un procedimento (*Verfahren*) per mezzo del quale per una data espressione logica si possa decidere la validità (o rispettivamente la soddisfacibilità) con un numero finito di operazioni"

1922 distinzione tra matematica e metamatematica

la "*decidibilità* di un problema matematico mediante un numero finito di operazioni" è chiamata *Entscheidungsproblem* per antonomasia:

"determinare se una data formula qualsiasi del calcolo dei predicati è universalmente valida o no"

risolto solo se "è conosciuto un procedimento (*Verfahren*) per mezzo del quale per una data espressione logica si possa decidere la validità (o rispettivamente la soddisfacibilità) con un numero finito di operazioni"

se la soluzione $A$ dipende, ed è dimostrata tale in base a un numero finito $T$ di assiomi della teoria a cui appartiene, allora $A$ è logicamente deducibile da $\wedge T$ e $\wedge T \to A$ è universalmente valida, e viceversa

aspettative contrastanti; matematici più famosi paventavano tale eventualità

aspettative contrastanti; matematici più famosi paventavano tale eventualità

Godfrey H. Hardy (1840-1928):

> Non esiste naturalmente un teorema del genere, per fortuna, perché se ci fosse noi avremmo un insieme meccanico di regole per la soluzione di tutti i problemi matematici, e il nostro lavoro come matematici verrebbe a finire.

aspettative contrastanti; matematici più famosi paventavano tale eventualità

Godfrey H. Hardy (1840-1928):

> Non esiste naturalmente un teorema del genere, per fortuna, perché se ci fosse noi avremmo un insieme meccanico di regole per la soluzione di tutti i problemi matematici, e il nostro lavoro come matematici verrebbe a finire.

Hermann Weyl (1885-1955):

> Se si riuscisse un giorno [a dimostrare la completezza della geometria elementare] questa intuizione ci aprirebbe la strada per decidere la verità o falsità di ogni giudizio geometrico [...] applicando metodicamente una certa tecnica deduttiva ('con un numero finito di passi'): la matematica si troverebbe *banalizzata*, almeno in linea di principio.

progressi incoraggianti

progressi incoraggianti

logica proposizionale dimostrata decidibile nel 1918 da Paul Bernays (1888-1977),

e nel 1920 da Emil Post (1897-1954)

progressi incoraggianti

logica proposizionale dimostrata decidibile nel 1918 da Paul Bernays (1888-1977),
e nel 1920 da Emil Post (1897-1954)

calcolo dei predicati monadici nel 1915 da Leopold Löwenheim (1878-1957)

progressi incoraggianti

logica proposizionale dimostrata decidibile nel 1918 da Paul Bernays (1888-1977),
e nel 1920 da Emil Post (1897-1954)

calcolo dei predicati monadici nel 1915 da Leopold Löwenheim (1878-1957)

riduzione a formule della forma $\exists\exists\exists\forall\ldots\forall$ Gödel 1932

e metodo di decisione per formule $\exists\exists\forall\ldots\forall$ Gödel 1933

progressi incoraggianti

logica proposizionale dimostrata decidibile nel 1918 da Paul Bernays (1888-1977),
e nel 1920 da Emil Post (1897-1954)

calcolo dei predicati monadici nel 1915 da Leopold Löwenheim (1878-1957)

riduzione a formule della forma $\exists\exists\exists\forall\ldots\forall$ Gödel 1932

e metodo di decisione per formule $\exists\exists\forall\ldots\forall$ Gödel 1933

invece nel 1936 risposta negativa
da parte di Alonzo Church (1903-1995), di Alan Turing (1912-1954), e di Emil Leon Post (1897-1954)

## Da Göttingen a Princeton

Il 1936 non era il traguardo della storia dell'*Entscheidungsproblem* piuttosto quello della ricerca della definizione del concetto di funzione effettivamente calcolabile

## Da Göttingen a Princeton

Il 1936 non era il traguardo della storia dell'*Entscheidungsproblem* piuttosto quello della ricerca della definizione del concetto di funzione effettivamente calcolabile

Hermann Grassmann (1861)

se $a$ e $b$ sono termini qualunque della somma fondamentale intenderemo per somma $a + b$ quel termine per cui

$$a + (b + e) = (a + b) + e$$

[$e$ unità positiva]

## Da Göttingen a Princeton

Il 1936 non era il traguardo della storia dell'*Entscheidungsproblem* piuttosto quello della ricerca della definizione del concetto di funzione effettivamente calcolabile

Hermann Grassmann (1861)

se $a$ e $b$ sono termini qualunque della somma fondamentale intenderemo per somma $a+b$ quel termine per cui

$$a + (b + e) = (a + b) + e$$

[$e$ unità positiva]

Richard Dedekind, 1888

80. *Teorema d'induzione completa* (inferenza da $n$ a $n'$)
96. *Teorema*. In ogni parte $T$ di $N$ esiste uno e soltanto un numero *minimo*
126. *Teorema della definizione per induzione*

Thoralf Skolem (1923)

"paradigma ricorsivo" (*rekurrierende Denkweise*)

Thoralf Skolem (1923)

"paradigma ricorsivo" (*rekurrierende Denkweise*)

Funzioni ricorsive primitive

composizione e ricorsione primitiva

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) & = & g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y') & = & h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Thoralf Skolem (1923)

"paradigma ricorsivo" (*rekurrierende Denkweise*)

Funzioni ricorsive primitive

composizione e ricorsione primitiva

$$\begin{cases} f(\vec{x},0) & = & g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},y') & = & h(\vec{x},y,f(\vec{x},y)) \end{cases}$$

Kurt Gödel (1931)

In una lista di 46 proposizioni, le proprietà della classe delle funzioni ricorsive primitive, dal punto di vista dell'ampiezza, delle proprietà di chiusura e della definibilità.

La funzione di Ackermann (1928) non è ricorsiva primitiva
cresce più in fretta di tutte le ricorsive primitive
pur essendo calcolabile in un numero finito di passi per ogni argomento

La funzione di Ackermann (1928) non è ricorsiva primitiva
cresce più in fretta di tutte le ricorsive primitive
pur essendo calcolabile in un numero finito di passi per ogni argomento

Hilbert pensava servissero ricorsioni su funzionali, invece Ackermann:

$$\begin{cases} \varphi(0,a,b) & = & a+b \\ \varphi(n,a,1) & = & a \\ \varphi(n+1,a,b) & = & \varphi(n,a,\varphi(n+1,a,b-1)), \end{cases}$$

mediante sistemi di equazioni

Funzioni ricorsive generali

Herbrand e Gödel: sistemi di equazioni (Stephen C. Kleene, 1936)

Regole di HG:

$R_1$: $e_2$ si ottiene da $e_1$ sostituendo un numerale $n$ a tutte le occorrenze di una variabile;

$R_2$:
$$\frac{r = s \qquad \psi_{ij}(n_1, \ldots, n_m) = p}{e}$$

se e solo se $e$ si ottiene da $r = s$ rimpiazzando una o più occorrenze di $\psi_{ij}(n_1, \ldots, n_m)$ in $s$ con $p$, e $r = s$ non contiene alcuna variabile.

Stephen C. Kleene (1909-1994) e J. Barkley Rosser (1907-1989) allievi di Church, interagivano con Gödel

Stephen C. Kleene (1909-1994) e J. Barkley Rosser (1907-1989) allievi di Church, interagivano con Gödel

Church: primo tentativo di impostare teoria generale delle funzioni ispirata da logica combinatoria nel 1932-33
dimostrato inconsistente da Kleene e Rosser nel 1935

Stephen C. Kleene (1909-1994) e J. Barkley Rosser (1907-1989)
allievi di Church, interagivano con Gödel

Church: primo tentativo di impostare teoria generale delle funzioni
ispirata da logica combinatoria nel 1932-33
dimostrato inconsistente da Kleene e Rosser nel 1935

secondo tentativo nel 1935 con $\lambda$-definibilità

come formalizzazione dell'intuitiva "calcolabilità effettiva"

Church 1935: un formalismo per la definizione di funzioni con l'*applicazione* $MN$ e l'*astrazione* $\lambda x.M$: le funzioni $\lambda$-definibili erano quelle rappresentabili da $\lambda$-termini trasformabili.

La $\lambda$-notazione si trasforma in un calcolo mediante regole di conversione, precisamente:

$\alpha$. Se $y$ non è libera in $X$, allora $\lambda x.X \text{ cnv}_\alpha\ \lambda y.[y/x]X$

$\beta$. $(\lambda x.M)N \text{ cnv}_\beta\ [N/x]M$

$\eta$. Se $x$ non è libera in $M$, allora $\lambda x.Mx \text{ cnv}_\eta\ M$.

eliminare il massimo numero di astrazioni, con la seconda e terza regola

un'espressione che non possa essere ridotta si dice *in forma normale*

teorema di Church-Rosser I: Nessuna espressione può essere convertita a due distinte forme normali

Kleene dimostra subito che è equivalente al sistema HG delle ricorsive generali

Kleene dimostra subito che è equivalente al sistema HG delle ricorsive generali

Church si convince che il concetto intuitivo di effettivamente calcolabile sia caratterizzato da queste definizioni a priori così lontane tra loro ed enuncia la sua tesi

che le funzioni effettivamente calcolabili, per lui le sue $\lambda$-definibili, siano le ricorsive generali

Gödel all'inizio non convinto (equivalenza dimostrata da Kleene non banale)

A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-63, 1936

A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-63, 1936

> Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre una definizione di calcolabilità effettiva che si pensa corrisponda in modo soddisfacente alla vaga nozione intuitiva in termini della quale i problemi di questa classe sono spesso formulati, e di mostrare, con un esempio, che non tutti i problemi di questa classe sono risolvibili.

A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-63, 1936

> Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre una definizione di calcolabilità effettiva che si pensa corrisponda in modo soddisfacente alla vaga nozione intuitiva in termini della quale i problemi di questa classe sono spesso formulati, e di mostrare, con un esempio, che non tutti i problemi di questa classe sono risolvibili.

sistema di logica in cui dedurre significa trasformare in forma normale e le funzioni calcolabili nella logica sono effettivamente calcolabili

ma non esiste alcun sistema di invarianti che sia effettivamente calcolabile e

A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *The American Journal of Mathematics*, vol. 58, pp. 345-63, 1936

> Lo scopo di questo lavoro è quello di proporre una definizione di calcolabilità effettiva che si pensa corrisponda in modo soddisfacente alla vaga nozione intuitiva in termini della quale i problemi di questa classe sono spesso formulati, e di mostrare, con un esempio, che non tutti i problemi di questa classe sono risolvibili.

sistema di logica in cui dedurre significa trasformare in forma normale e le funzioni calcolabili nella logica sono effettivamente calcolabili

ma non esiste alcun sistema di invarianti che sia effettivamente calcolabile e

Teor. XVIII: “Non esiste alcuna funzione ricorsiva di una formula $\boldsymbol{C}$ il cui valore sia 2 o 1 a seconda che $\boldsymbol{C}$ abbia una forma normale o no”,

cioè la proprietà di una formula di avere una forma normale, non è ricorsiva

Kleene (1936): funzioni $\mu$-ricorsive,
che aggiungono l'operatore di minimo alla ricorsione primitiva:

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$$

se per ogni $\vec{x}$ esiste un $y$ t.c. $g(\vec{x}, y) = 0$
dimostrando equivalenza
1938 Kleene, 1938: funzioni ricorsive parziali

evitare la diagonalizzazione: se $\varphi_x$ è l'$x$-esima funzione ricorsiva, la funzione

$$\varphi(x) = \varphi_x(x) + 1$$

non è ricorsiva, ma calcolabile se l'enumerazione delle funzioni ricorsive è effettiva;
$\varphi$ invece può essere una funzione ricorsiva (parziale) $\varphi_r$ con la via di fuga che $\varphi_r(r)$ non è definita.