Sulla filosofia strutturalista della matematica

Gianluigi Oliveri

Università degli Studi di Palermo
Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo
gianluigi.oliveri@unipa.it

Accademia Nazionale dei Lincei, 4–5 aprile 2024

Realismo matematico tradizionale

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

E, quindi, ha senso porsi domande quali:

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

E, quindi, ha senso porsi domande quali: **Cosa sono i numeri naturali?**,

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

E, quindi, ha senso porsi domande quali: **Cosa sono i numeri naturali?**, **Come abbiamo conoscenza dei numeri naturali?**

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

E, quindi, ha senso porsi domande quali: **Cosa sono i numeri naturali?**, **Come abbiamo conoscenza dei numeri naturali?**

I numeri naturali sono oggetti astratti che esistono indipendentemente dall'essere pensati.

Realismo matematico tradizionale

La matematica classica, dal tempo dei Greci fino alla prima parte del 1800, è pervasa da una filosofia **realista** secondo la quale:

le teorie matematiche producono conoscenza riguardante l'esistenza e le proprietà di determinate entità.

In particolare:

- l'**aritmetica** si occupa dei numeri naturali;
- la **geometria Euclidea** di punti, rette, piani, poligoni, poliedri, ecc.
- l'**algebra** di equazioni polinomiali di grado n; ecc. ecc.

E, quindi, ha senso porsi domande quali: **Cosa sono i numeri naturali?**, **Come abbiamo conoscenza dei numeri naturali?**

I numeri naturali sono oggetti astratti che esistono indipendentemente dall'essere pensati. Questi ci vengono dati per mezzo del linguaggio [G. Frege, *I Fondamenti dell'Aritmetica*, 1884.]

Frege sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Frege sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Ma, nel 1899, Hilbert pubblica i *Fondamenti della Geometria* (**FdG**) e Frege scrive ad Hilbert (lettera a Hilbert del 27 dicembre 1899) facendogli garbatamente notare che nel libro:

Frege sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Ma, nel 1899, Hilbert pubblica i *Fondamenti della Geometria* (**FdG**) e Frege scrive ad Hilbert (lettera a Hilbert del 27 dicembre 1899) facendogli garbatamente notare che nel libro:

(a) mancano le definizioni di **punto**; **retta**; **piano**; e della relazione tra punti 'x **è fra** y **e** z;'

Frege sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Ma, nel 1899, Hilbert pubblica i *Fondamenti della Geometria* (**FdG**) e Frege scrive ad Hilbert (lettera a Hilbert del 27 dicembre 1899) facendogli garbatamente notare che nel libro:

(a) mancano le definizioni di **punto**; **retta**; **piano**; e della relazione tra punti 'x **è fra** y **e** z;'

(b) Hilbert non sembra tenere conto della distinzione tra **definizione** e **assioma**: le definizioni, dice Frege, non sono delle asserzioni genuine, ma sono delle espressioni che servono a **stabilire qualcosa**; gli assiomi, invece, sono delle **asserzioni vere** la cui verità, **nel caso della geometria**, dipende da una fonte extra-logica, l'**intuizione spaziale**;

Frege sui *Fondamenti della Geometria* di Hilbert

Ma, nel 1899, Hilbert pubblica i *Fondamenti della Geometria* (**FdG**) e Frege scrive ad Hilbert (lettera a Hilbert del 27 dicembre 1899) facendogli garbatamente notare che nel libro:

(a) mancano le definizioni di **punto**; **retta**; **piano**; e della relazione tra punti '*x* **è fra** *y* **e** *z*;'

(b) Hilbert non sembra tenere conto della distinzione tra **definizione** e **assioma**: le definizioni, dice Frege, non sono delle asserzioni genuine, ma sono delle espressioni che servono a **stabilire qualcosa**; gli assiomi, invece, sono delle **asserzioni vere** la cui verità, **nel caso della geometria**, dipende da una fonte extra-logica, l'**intuizione spaziale**;

(c) è l'essere veri degli assiomi ciò che garantisce la loro coerenza.

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

I concetti menzionati da Frege sono **definiti implicitamente** dagli assiomi di **FdG**.

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

I concetti menzionati da Frege sono **definiti implicitamente** dagli assiomi di **FdG**.

Esempio (La relazione '**fra**' e gli **Assiomi di ordinamento**)

1. *Se un punto A sta* **fra** *B e C, A sta anche* **fra** *C e B, ed i tre punti sono allineati.*

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

I concetti menzionati da Frege sono **definiti implicitamente** dagli assiomi di **FdG**.

Esempio (La relazione '**fra**' e gli **Assiomi di ordinamento**)

1. *Se un punto A sta* **fra** *B e C, A sta anche* **fra** *C e B, ed i tre punti sono allineati.*
2. *Dati due punti distinti A e B, esistono un terzo e un quarto punto C e D sulla retta passante per A e B tali che A sta* **fra** *C e B e B sta* **fra** *A e D.*

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

I concetti menzionati da Frege sono **definiti implicitamente** dagli assiomi di **FdG**.

Esempio (La relazione '**fra**' e gli **Assiomi di ordinamento**)

1. *Se un punto A sta* **fra** *B e C, A sta anche* **fra** *C e B, ed i tre punti sono allineati.*
2. *Dati due punti distinti A e B, esistono un terzo e un quarto punto C e D sulla retta passante per A e B tali che A sta* **fra** *C e B e B sta* **fra** *A e D.*
3. *Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è esattamente uno che giace* **fra** *gli altri due.*

La risposta di Hilbert ad (a) e (b): le definizioni implicite

I concetti menzionati da Frege sono **definiti implicitamente** dagli assiomi di **FdG**.

Esempio (La relazione '**fra**' e gli **Assiomi di ordinamento**)

1. *Se un punto A sta* **fra** *B e C, A sta anche* **fra** *C e B, ed i tre punti sono allineati.*
2. *Dati due punti distinti A e B, esistono un terzo e un quarto punto C e D sulla retta passante per A e B tali che A sta* **fra** *C e B e B sta* **fra** *A e D.*
3. *Dati tre punti distinti e allineati, ce n'è esattamente uno che giace* **fra** *gli altri due.*
4. **Assioma di Pasch**: *Siano dati tre punti A, B e C non allineati, contenuti in un piano p, ed una retta d contenuta in p non contenente nessuno dei tre punti A, B, C. Se d contiene un punto del segmento AB [***fra** *A e B], allora contiene anche un punto di uno dei due segmenti AC [***fra** *A e C] e BC [***fra** *B e C].*

Strutturalismo hilbertiano?

Strutturalismo hilbertiano?

Inoltre, dice Hilbert:

Strutturalismo hilbertiano?

Inoltre, dice Hilbert:

> *[S]i comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che* **gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario**. *[Lettera a Frege del 29 dicembre 1899.]*

Strutturalismo hilbertiano?

Inoltre, dice Hilbert:

> *[S]i comprende da sé che ogni teoria è solo un telaio, uno schema di concetti unitamente alle loro mutue relazioni necessarie, e che* **gli elementi fondamentali possono venir pensati in modo arbitrario**. *[Lettera a Frege del 29 dicembre 1899.]*

E l'ondata strutturalista che ha travolto la geometria Euclidea sembra raggiungere anche l'aritmetica. Anzi, forse è partita proprio dall'aritmetica!

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

1. 0 è un numero.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

1. 0 è un numero.
2. Il successore di un numero è un numero.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

1. 0 è un numero.
2. Il successore di un numero è un numero.
3. Due numeri diversi l'uno dall'altro hanno successori diversi l'uno dall'altro.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

1. 0 è un numero.
2. Il successore di un numero è un numero.
3. Due numeri diversi l'uno dall'altro hanno successori diversi l'uno dall'altro.
4. 0 non è il successore di nessun numero.

Il sistema assiomatico di Dedekind-Peano

R. Dedekind, *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen?*, 1888.

G. Peano, *Arithmetices Principia*, 1889.

Nozioni primitive: 0, numero, successore.

Assiomi di Peano:

1. 0 è un numero.
2. Il successore di un numero è un numero.
3. Due numeri diversi l'uno dall'altro hanno successori diversi l'uno dall'altro.
4. 0 non è il successore di nessun numero.
5. Ogni proprietà che appartenga allo 0, e al successore di ogni numero che ha questa proprietà, è una proprietà che appartiene ad ogni numero.

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Date le due seguenti interpretazioni delle nozioni primitive:

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Date le due seguenti interpretazioni delle nozioni primitive:

Zero	**Numero**	**Successore**
0	$x \in \mathbb{N}$	$x' = x + 1$
$*$	$x \in \mathrm{S}$	$x' = \{x\}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\quad x' = x + 1$, $\quad (\mathbb{N}, 0, x + 1)$;
- $\mathrm{S} = \{*, \{*\}, \{\{*\}\}, \ldots\}$, $\quad x' = \{x\}$, $\quad (\mathrm{S}, *, \{x\})$;

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Date le due seguenti interpretazioni delle nozioni primitive:

Zero	**Numero**	**Successore**
0	$x \in \mathbb{N}$	$x' = x + 1$
$*$	$x \in \mathrm{S}$	$x' = \{x\}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\quad x' = x + 1$, $\quad (\mathbb{N}, 0, x + 1)$;
- $\mathrm{S} = \{*, \{*\}, \{\{*\}\}, \ldots\}$, $\quad x' = \{x\}$, $\quad (\mathrm{S}, *, \{x\})$;

ci sono (almeno) due diversi modelli degli assiomi di Peano in cui gli **elementi fondamentali** di un modello differiscono da quelli dell'altro. E quindi . . .

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Date le due seguenti interpretazioni delle nozioni primitive:

Zero	**Numero**	**Successore**
0	$x \in \mathbb{N}$	$x' = x + 1$
$*$	$x \in \mathrm{S}$	$x' = \{x\}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\quad x' = x + 1$, $\quad (\mathbb{N}, 0, x + 1)$;
- $\mathrm{S} = \{*, \{*\}, \{\{*\}\}, \dots\}$, $\quad x' = \{x\}$, $\quad (\mathrm{S}, *, \{x\})$;

ci sono (almeno) due diversi modelli degli assiomi di Peano in cui gli **elementi fondamentali** di un modello differiscono da quelli dell'altro. E quindi ...

Non c'è modo di dire cosa sono. . . i numeri naturali; c'è soltanto l'aritmetica, W.V. Quine, 'Ontological Relativity.'

Due diversi modelli degli assiomi di Peano

Date le due seguenti interpretazioni delle nozioni primitive:

Zero	Numero	Successore
0	$x \in \mathbb{N}$	$x' = x + 1$
$*$	$x \in \mathrm{S}$	$x' = \{x\}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $x' = x + 1$, $(\mathbb{N}, 0, x + 1)$;
- $\mathrm{S} = \{*, \{*\}, \{\{*\}\}, \ldots\}$, $x' = \{x\}$, $(\mathrm{S}, *, \{x\})$;

ci sono (almeno) due diversi modelli degli assiomi di Peano in cui gli **elementi fondamentali** di un modello differiscono da quelli dell'altro. E quindi ...

Non c'è modo di dire cosa sono. . . i numeri naturali; c'è soltanto l'aritmetica, W.V. Quine, 'Ontological Relativity.'

Ed è, quindi, la forma/struttura ciò che è alla base dell'aritmetica, non i numeri naturali!

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

In risposta a (c), Hilbert asserisce che:

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

In risposta a (c), Hilbert asserisce che:

> *Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora* **essi sono veri**, *allora* **esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi**. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza. [Lettera a Frege, 29 dicembre 1899.]*

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

In risposta a (c), Hilbert asserisce che:

> *Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora* **essi sono veri**, *allora* **esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi**. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza. [Lettera a Frege, 29 dicembre 1899.]*

Queste idee di Hilbert finiscono per assumere una posizione centrale non solo:

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

In risposta a (c), Hilbert asserisce che:

> *Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora* **essi sono veri**, *allora* **esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi**. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza. [Lettera a Frege, 29 dicembre 1899.]*

Queste idee di Hilbert finiscono per assumere una posizione centrale non solo:

- nel cosiddetto '**programma di Hilbert**;' ma anche

La risposta di Hilbert a (c): il programma di Hilbert e la teoria coerentista della verità

In risposta a (c), Hilbert asserisce che:

> *Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora* **essi sono veri**, *allora* **esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi**. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza. [Lettera a Frege, 29 dicembre 1899.]*

Queste idee di Hilbert finiscono per assumere una posizione centrale non solo:

- nel cosiddetto '**programma di Hilbert**;' ma anche
- in una nuova teoria della verità nota come **teoria coerentista della verità**: un'asserzione P è vera se P è un elemento di un insieme coerente $\mathfrak{P}$ di asserzioni o se può essere aggiunta ad un insieme coerente di asserzioni $\mathfrak{P}$ senza alterarne la coerenza.

Verso un cambiamento di paradigma nella matematica classica del '900. Lo strutturalismo locale

Verso un cambiamento di paradigma nella matematica classica del '900. Lo strutturalismo locale

Le parole 'profetiche' di Hilbert, relative alle risposte ad (a) e (b), finiscono per realizzarsi in gran parte della pratica della matematica classica del '900 in cui, come abbiamo visto accade in geometria Euclidea e in teoria dei numeri,

Verso un cambiamento di paradigma nella matematica classica del '900. Lo strutturalismo locale

Le parole 'profetiche' di Hilbert, relative alle risposte ad (a) e (b), finiscono per realizzarsi in gran parte della pratica della matematica classica del '900 in cui, come abbiamo visto accade in geometria Euclidea e in teoria dei numeri,

- **astraendo** da quelli che Hilbert chiama 'elementi fondamentali,'

Verso un cambiamento di paradigma nella matematica classica del '900. Lo strutturalismo locale

Le parole 'profetiche' di Hilbert, relative alle risposte ad (a) e (b), finiscono per realizzarsi in gran parte della pratica della matematica classica del '900 in cui, come abbiamo visto accade in geometria Euclidea e in teoria dei numeri,

- **astraendo** da quelli che Hilbert chiama 'elementi fondamentali,'
- non solo, come dice Quine riferendosi al caso dei numeri naturali, 'rimane l'aritmetica,' ma emerge un'entità nuova, la **struttura**, che consiste di un insieme S e di una **operazione** $(+, \cdot)$ o **relazione** $(\leq)$ o **metrica** (d) o **topologia** $(\mathfrak{T})$ definita su S, struttura le cui proprietà sono specificate da un opportuno **insieme di assiomi**.

Verso un cambiamento di paradigma nella matematica classica del '900. Lo strutturalismo locale

Le parole 'profetiche' di Hilbert, relative alle risposte ad (a) e (b), finiscono per realizzarsi in gran parte della pratica della matematica classica del '900 in cui, come abbiamo visto accade in geometria Euclidea e in teoria dei numeri,

- **astraendo** da quelli che Hilbert chiama 'elementi fondamentali,'
- non solo, come dice Quine riferendosi al caso dei numeri naturali, 'rimane l'aritmetica,' ma emerge un'entità nuova, la **struttura**, che consiste di un insieme S e di una **operazione** $(+, \cdot)$ o **relazione** $(\leq)$ o **metrica** (d) o **topologia** $(\mathfrak{T})$ definita su S, struttura le cui proprietà sono specificate da un opportuno **insieme di assiomi**.

È chiaro che qui il cosiddetto 'convitato di pietra' è il **metodo assiomatico**.

Dallo strutturalismo locale allo strutturalismo globale. Il paradigma è cambiato

Dallo strutturalismo locale allo strutturalismo globale. Il paradigma è cambiato

Nel corso del '900 si scopre che sia la **teoria assiomatica degli insiemi**, per esempio il sistema ZFC, che la **teoria delle categorie** sono delle teorie all'interno delle quali è possibile esprimere le altre teorie matematiche.

Dallo strutturalismo locale allo strutturalismo globale. Il paradigma è cambiato

Nel corso del '900 si scopre che sia la **teoria assiomatica degli insiemi**, per esempio il sistema ZFC, che la **teoria delle categorie** sono delle teorie all'interno delle quali è possibile esprimere le altre teorie matematiche.

E, dal momento che sia ZFC che la teoria delle categorie sono soggette ad un'interpretazione strutturalista, sembra che questa interpretazione possa essere estesa anche alle teorie matematiche esprimibili all'interno di esse.

Dallo strutturalismo locale allo strutturalismo globale. Il paradigma è cambiato

Nel corso del '900 si scopre che sia la **teoria assiomatica degli insiemi**, per esempio il sistema ZFC, che la **teoria delle categorie** sono delle teorie all'interno delle quali è possibile esprimere le altre teorie matematiche.

E, dal momento che sia ZFC che la teoria delle categorie sono soggette ad un'interpretazione strutturalista, sembra che questa interpretazione possa essere estesa anche alle teorie matematiche esprimibili all'interno di esse.

Tutto questo conduce, naturalmente, ad una forma di **strutturalismo globale**, portando così a compimento un radicale **cambiamento di paradigma** all'interno della matematica del '900.

Dallo strutturalismo locale allo strutturalismo globale. Il paradigma è cambiato

Nel corso del '900 si scopre che sia la **teoria assiomatica degli insiemi**, per esempio il sistema ZFC, che la **teoria delle categorie** sono delle teorie all'interno delle quali è possibile esprimere le altre teorie matematiche.

E, dal momento che sia ZFC che la teoria delle categorie sono soggette ad un'interpretazione strutturalista, sembra che questa interpretazione possa essere estesa anche alle teorie matematiche esprimibili all'interno di esse.

Tutto questo conduce, naturalmente, ad una forma di **strutturalismo globale**, portando così a compimento un radicale **cambiamento di paradigma** all'interno della matematica del '900.

N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, 1939–2016.

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Dal momento che lo strutturalismo globale si impone, come abbiamo visto, per mezzo della teoria assiomatica degli insiemi e la teoria delle categorie, e che queste si pongono come due **teorie rivali**, ha senso chiedersi:

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Dal momento che lo strutturalismo globale si impone, come abbiamo visto, per mezzo della teoria assiomatica degli insiemi e la teoria delle categorie, e che queste si pongono come due **teorie rivali**, ha senso chiedersi:

Problema (dei Fondamenti)

Quali sono le strutture basilari sulle quali è fondata la realtà matematica, quelle insiemistiche o le categoriali?

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Dal momento che lo strutturalismo globale si impone, come abbiamo visto, per mezzo della teoria assiomatica degli insiemi e la teoria delle categorie, e che queste si pongono come due **teorie rivali**, ha senso chiedersi:

Problema (dei Fondamenti)

Quali sono le strutture basilari sulle quali è fondata la realtà matematica, quelle insiemistiche o le categoriali?

Notiamo che, se queste due teorie dovessero eventualmente risultare **incommensurabili**, questo fatto:

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Dal momento che lo strutturalismo globale si impone, come abbiamo visto, per mezzo della teoria assiomatica degli insiemi e la teoria delle categorie, e che queste si pongono come due **teorie rivali**, ha senso chiedersi:

Problema (dei Fondamenti)

Quali sono le strutture basilari sulle quali è fondata la realtà matematica, quelle insiemistiche o le categoriali?

Notiamo che, se queste due teorie dovessero eventualmente risultare **incommensurabili**, questo fatto:

- non metterebbe in pericolo l'accettabilità di una filosofia strutturalista della matematica, perché **entrambe** queste teorie sono soggette ad un'interpretazione strutturalista;

Lo strutturalismo globale e il problema dei fondamenti

Dal momento che lo strutturalismo globale si impone, come abbiamo visto, per mezzo della teoria assiomatica degli insiemi e la teoria delle categorie, e che queste si pongono come due **teorie rivali**, ha senso chiedersi:

Problema (dei Fondamenti)

Quali sono le strutture basilari sulle quali è fondata la realtà matematica, quelle insiemistiche o le categoriali?

Notiamo che, se queste due teorie dovessero eventualmente risultare **incommensurabili**, questo fatto:

- non metterebbe in pericolo l'accettabilità di una filosofia strutturalista della matematica, perché **entrambe** queste teorie sono soggette ad un'interpretazione strutturalista;
- ma, comprometterebbe la capacità di queste due teorie di risolvere il **Problema dei Fondamenti**.

Che fare? Consideriamo l'analisi reale

Che fare? Consideriamo l'analisi reale

L'**analisi reale** è quella teoria matematica i cui principali oggetti d'indagine sono i fenomeni della **convergenza**, **continuità**, **derivazione** e **integrazione** che si manifestano **nel contesto fornito dai numeri reali**.

Che fare? Consideriamo l'analisi reale

L'**analisi reale** è quella teoria matematica i cui principali oggetti d'indagine sono i fenomeni della **convergenza**, **continuità**, **derivazione** e **integrazione** che si manifestano **nel contesto fornito dai numeri reali**.

Ora, dal momento che anche i numeri reali, come i numeri naturali, possono essere caratterizzati solo **a meno di isomorfismi**, possiamo affermare, facendo il verso a Quine, che:

Che fare? Consideriamo l'analisi reale

L'**analisi reale** è quella teoria matematica i cui principali oggetti d'indagine sono i fenomeni della **convergenza**, **continuità**, **derivazione** e **integrazione** che si manifestano **nel contesto fornito dai numeri reali**.

Ora, dal momento che anche i numeri reali, come i numeri naturali, possono essere caratterizzati solo **a meno di isomorfismi**, possiamo affermare, facendo il verso a Quine, che:

non c'è modo di dire cosa sono i numeri reali;

Che fare? Consideriamo l'analisi reale

L'**analisi reale** è quella teoria matematica i cui principali oggetti d'indagine sono i fenomeni della **convergenza**, **continuità**, **derivazione** e **integrazione** che si manifestano **nel contesto fornito dai numeri reali**.

Ora, dal momento che anche i numeri reali, come i numeri naturali, possono essere caratterizzati solo **a meno di isomorfismi**, possiamo affermare, facendo il verso a Quine, che:

non c'è modo di dire cosa sono i numeri reali;

e che, quindi, come nel caso dell'aritmetica, i teoremi dell'analisi reale hanno una **natura strutturale/formale**. Chiamiamo '*patterns*' le forme che vengono da loro descritte.

La matematica come una scienza di *patterns*

La matematica come una scienza di *patterns*

Il fatto che i teoremi dell'analisi reale descrivano dei *patterns* non implica che questi debbano essere relativi all'esistenza e/o alla rappresentazione di strutture, nel senso in cui noi abbiamo definito queste entità. Anche se le strutture esemplificano particolari tipi di *patterns*.

La matematica come una scienza di *patterns*

Il fatto che i teoremi dell'analisi reale descrivano dei *patterns* non implica che questi debbano essere relativi all'esistenza e/o alla rappresentazione di strutture, nel senso in cui noi abbiamo definito queste entità. Anche se le strutture esemplificano particolari tipi di *patterns*.

Infine, dal momento che le considerazioni relative all'analisi reale sono applicabili non solo a questa teoria, ma ad ogni teoria matematica assiomatizzata, possiamo concludere che:

La matematica come una scienza di *patterns*

Il fatto che i teoremi dell'analisi reale descrivano dei *patterns* non implica che questi debbano essere relativi all'esistenza e/o alla rappresentazione di strutture, nel senso in cui noi abbiamo definito queste entità. Anche se le strutture esemplificano particolari tipi di *patterns*.

Infine, dal momento che le considerazioni relative all'analisi reale sono applicabili non solo a questa teoria, ma ad ogni teoria matematica assiomatizzata, possiamo concludere che:

- la matematica è una scienza di *patterns*/forme; e che

La matematica come una scienza di *patterns*

Il fatto che i teoremi dell'analisi reale descrivano dei *patterns* non implica che questi debbano essere relativi all'esistenza e/o alla rappresentazione di strutture, nel senso in cui noi abbiamo definito queste entità. Anche se le strutture esemplificano particolari tipi di *patterns*.

Infine, dal momento che le considerazioni relative all'analisi reale sono applicabili non solo a questa teoria, ma ad ogni teoria matematica assiomatizzata, possiamo concludere che:

- la matematica è una scienza di *patterns*/forme; e che
- l'eventuale incommensurabilità della teoria assiomatica degli insiemi con la teoria delle categorie rivelerebbe semplicemente che queste due teorie non sono altro che due modi diversi e **complementari** di rappresentare i *patterns* matematici.

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Definizione (di Gruppo)

Un insieme G *su cui è definita una legge di composizione* $*$ *è un gruppo se:*

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Definizione (di Gruppo)

Un insieme G su cui è definita una legge di composizione $*$ è un gruppo se:

1. *per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G esiste un unico elemento c di G tale che $a * b = c$;*

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Definizione (di Gruppo)

Un insieme G su cui è definita una legge di composizione $*$ è un gruppo se:

1. *per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G esiste un unico elemento c di G tale che $a * b = c$;*
2. *per ogni a, b, c appartenenti a G si ha che $(a * b) * c = a * (b * c)$;*

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Definizione (di Gruppo)

Un insieme G su cui è definita una legge di composizione $*$ è un gruppo se:

1. *per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G esiste un unico elemento c di G tale che $a * b = c$;*
2. *per ogni a, b, c appartenenti a G si ha che $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
3. *esiste un elemento e di G tale che, per ogni elemento a di G, $e * a = a * e = a$;*

Appendice 1: definizione implicita di gruppo

Definizione (di Gruppo)

Un insieme G su cui è definita una legge di composizione $*$ è un gruppo se:

1. *per ogni coppia ordinata a, b di elementi di G esiste un unico elemento c di G tale che $a * b = c$;*
2. *per ogni a, b, c appartenenti a G si ha che $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
3. *esiste un elemento e di G tale che, per ogni elemento a di G, $e * a = a * e = a$;*
4. *per ogni elemento a di G esiste un elemento a^{-1} di G tale che $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.*

Appendice 2: definizione implicita di spazio topologico

Appendice 2: definizione implicita di spazio topologico

Definizione (di Spazio topologico)

Uno spazio topologico è una coppia $(S, \mathcal{T})$ *tale che* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{T}$ *è una classe di sottoinsiemi di* S, *una* **topologia su** S, *tale che:*

Appendice 2: definizione implicita di spazio topologico

Definizione (di Spazio topologico)

Uno spazio topologico è una coppia $(S, \mathcal{T})$ *tale che* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{T}$ *è una classe di sottoinsiemi di* S, *una* **topologia su** S, *tale che:*

1. S *e* $\emptyset$ *sono elementi di* $\mathcal{T}$;

Appendice 2: definizione implicita di spazio topologico

Definizione (di Spazio topologico)

Uno spazio topologico è una coppia $(S, \mathcal{T})$ *tale che* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{T}$ *è una classe di sottoinsiemi di* S, *una* **topologia su** S, *tale che:*

1. S *e* $\emptyset$ *sono elementi di* $\mathcal{T}$;
2. *l'unione di un numero qualsiasi di elementi di* $\mathcal{T}$ *è un elemento di* $\mathcal{T}$;

Appendice 2: definizione implicita di spazio topologico

Definizione (di Spazio topologico)

Uno spazio topologico è una coppia $(S, \mathcal{T})$ *tale che* S *è un insieme non vuoto e* $\mathcal{T}$ *è una classe di sottoinsiemi di* S, *una* **topologia su** S, *tale che:*

1. S *e* $\emptyset$ *sono elementi di* $\mathcal{T}$;
2. *l'unione di un numero qualsiasi di elementi di* $\mathcal{T}$ *è un elemento di* $\mathcal{T}$;
3. *se* X *e* Y *sono elementi di* $\mathcal{T}$ *anche* $X \cap Y$ *è un elemento di* $\mathcal{T}$.

Appendice 3: La risposta di Hilbert a (c). Un'eredità cantoriana?

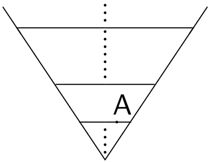
Appendice 3: La risposta di Hilbert a (c). Un'eredità cantoriana?

"La matematica si sviluppa in modo completamente libero, salvo l'ovvia avvertenza che **i suoi concetti non possono essere in sé contradditori e devono stare in un rapporto certo, regolato da definizioni, con quelli costruiti in precedenza e già disponibili e consolidati**. Quando, in particolare, essa introduce nuovi numeri è tenuta solo a darne definizioni che assicurino loro una determinatezza, e in certi casi una relazione con numeri già dati, tali che sia possibile, caso per caso, distinguerli l'uno dall'altro. **Non appena un numero soddisfa tutte queste condizioni lo si può e deve considerare esistente e reale in matematica**." [G. Cantor, 'Sulle molteplicità lineari infinite di punti n. 5, Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità,' §8, trad. di Gianni Rigamonti, 1883.]

Appendice 4: la concezione iterativa di insieme e l'universo di von Neumann

Appendice 4: la concezione iterativa di insieme e l'universo di von Neumann

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, se λ è un ordinale limite;
- $V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$.



$$V_\omega = \bigcup_{\alpha<\omega} V_\alpha$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

$$V_\alpha$$

$$V_0 = \emptyset$$

Figura: L'universo di von Neumann

Appendice 5: la concezione iterativa di insieme e l'universo degli insiemi costruibili L

Appendice 5: la concezione iterativa di insieme e l'universo degli insiemi costruibili L

- $L_0 = \emptyset$;
- $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha) = \{X \mid X \subseteq L_\alpha$ e X è **definibile**$\}$;
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$, se λ è un **ordinale limite**;
- $L = \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha$.

Appendice 5: la concezione iterativa di insieme e l'universo degli insiemi costruibili L

- $L_0 = \emptyset$;
- $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha) = \{X \mid X \subseteq L_\alpha$ e X è **definibile**$\}$;
- $L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha$, se λ è un **ordinale limite**;
- $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$.

Teorema

Se α è un ordinale finito o $\alpha = \omega$ allora $L_\alpha = V_\alpha$. Se α è un ordinale infinito e $\alpha \neq \omega$ allora $|L_\alpha| = |\alpha|$.

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*
2. *associato ad ogni oggetto A è il morfismo identico di A, 1_A, il cui dominio e codominio sono l'oggetto A;*

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*
2. *associato ad ogni oggetto A è il morfismo identico di A, 1_A, il cui dominio e codominio sono l'oggetto A;*
3. *se f è un morfismo dall'oggetto A all'oggetto B, allora:*

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*
2. *associato ad ogni oggetto A è il morfismo identico di A, 1_A, il cui dominio e codominio sono l'oggetto A;*
3. *se f è un morfismo dall'oggetto A all'oggetto B, allora:*

$$f \circ 1_A = f \quad e \quad 1_B \circ f = f;$$

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*
2. *associato ad ogni oggetto A è il morfismo identico di A, 1_A, il cui dominio e codominio sono l'oggetto A;*
3. *se f è un morfismo dall'oggetto A all'oggetto B, allora:*
$$f \circ 1_A = f \quad e \quad 1_B \circ f = f;$$
4. *se f è un morfismo da A in B e g è un morfismo da B in C allora esiste un morfismo $g \circ f$ da A in C;*

Appendice 6: Strutturalismo categoriale

La natura strutturalista della teoria delle categorie si mostra chiaramente a partire dalle definizione stessa di categoria.

Definizione (di categoria)

Una categoria consiste di **oggetti** *e* **morfismi** *tali che:*

1. *ad ogni morfismo f corrispondono due oggetti A e B (il* **dominio** *ed il* **codominio** *di f);*
2. *associato ad ogni oggetto A è il morfismo identico di A, 1_A, il cui dominio e codominio sono l'oggetto A;*
3. *se f è un morfismo dall'oggetto A all'oggetto B, allora:*
$$f \circ 1_A = f \quad \text{e} \quad 1_B \circ f = f;$$
4. *se f è un morfismo da A in B e g è un morfismo da B in C allora esiste un morfismo $g \circ f$ da A in C;*
5. *la composizione di morfismi $\circ$ gode della proprietà associativa.*

Appendie 7: I sistemi assiomatici non categorici individuano una struttura?

Appendie 7: I sistemi assiomatici non categorici individuano una struttura?

Il fatto che un sistema assiomatico quale quello della teoria dei gruppi non sia categorico non compromette la natura strutturalista della teoria in quanto:

Appendie 7: I sistemi assiomatici non categorici individuano una struttura?

Il fatto che un sistema assiomatico quale quello della teoria dei gruppi non sia categorico non compromette la natura strutturalista della teoria in quanto:

1. se il gruppo G non è isomorfo al gruppo H, G è comunque un rappresentante di una classe di (equivalenza) i cui elementi sono gruppi ciascuno dei quali è isomorfo a G (la stessa cosa vale per H);

Appendie 7: I sistemi assiomatici non categorici individuano una struttura?

Il fatto che un sistema assiomatico quale quello della teoria dei gruppi non sia categorico non compromette la natura strutturalista della teoria in quanto:

1. se il gruppo G non è isomorfo al gruppo H, G è comunque un rappresentante di una classe di (equivalenza) i cui elementi sono gruppi ciascuno dei quali è isomorfo a G (la stessa cosa vale per H);
2. il rapporto esistente tra gli assiomi di gruppo e la classe di gruppi isomorfi ad un dato gruppo G è quello di un **genere** relativamente alle **specie** che ricadono sotto di esso;

Appendie 7: I sistemi assiomatici non categorici individuano una struttura?

Il fatto che un sistema assiomatico quale quello della teoria dei gruppi non sia categorico non compromette la natura strutturalista della teoria in quanto:

1. se il gruppo G non è isomorfo al gruppo H, G è comunque un rappresentante di una classe di (equivalenza) i cui elementi sono gruppi ciascuno dei quali è isomorfo a G (la stessa cosa vale per H);
2. il rapporto esistente tra gli assiomi di gruppo e la classe di gruppi isomorfi ad un dato gruppo G è quello di un **genere** relativamente alle **specie** che ricadono sotto di esso;
3. ci sono tante strutture, **specie**, che ricadono sotto il **genere** gruppo quante sono le classi di equivalenza generate dalla relazione di equivalenza di isomorfismo definita sulla classe dei gruppi.